Chapter 2　汎関数と変分法

2.1　汎関数

　ふつうの関数は引数に値を入力したときに値を返すが、関数を入力したときに値を返すような関数のことを**汎関数**といい、$F[y(x)]$もしくは$F[y]$と表す。
　例えば、

$$F[y]=\int_a^b |y(x)|dx$$

は、区間$[a,b]$において関数$f(x)$とx軸に挟まれた領域の面積を表す汎関数である。また、

$$F[y]=\int_a^b \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$$

も汎関数である。これは、区間$[a,b]$における関数$y(x)$の曲線の長さを与える汎関数である。

2.2　変分法

　汎関数$F[y(x)]$が極値をとる関数$y(x)$を求める問題のことを変分問題といい、変分問題を解くための手続きが**変分法**である。ふつうの関数$f(x)$の極値問題では、$f'(x)=0$を極値条件として極値を求める。それと同じような考え方で、汎関数の極値問題では、汎関数$F[y(x)]$の変分δFを考える。**変分**とは、汎関数に入力する関数$y(x)$を微小量$\delta y(x)$だけ変化させたときの$F[x(y)]$の変化

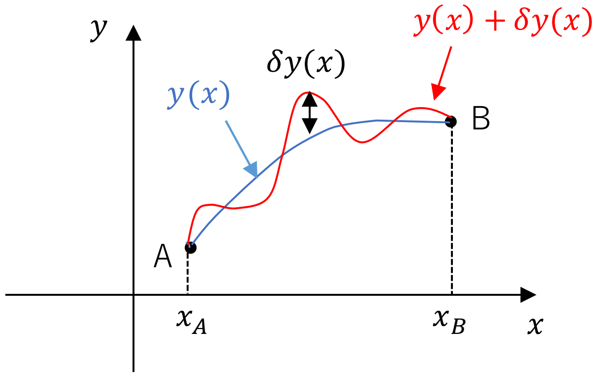
$$\delta F=F[y(x)+\delta y(x)]-f[y(x)] \tag{2.2.1}$$

のことである。汎関数の極値問題においては、

$$\delta F=0 \tag{2.2.2}$$

を極値条件として用いる。

例：平面上の 2 点を結ぶ曲線の長さ



　変分問題の具体的な例として、平面上の2点（点 A と B）を結ぶ曲線のうち長さが最小となる曲線の形状を求めてみよう。xy 平面上の 2 点 A と B の座標を、それぞれ(x_A,y_A)、(x_B,y_B)とする。点 A

とBを通るグラフ$y(x)$の長さは、以下の汎関数で与えられる。

$$F[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

ここで、$f\big(y'(x)\big) = \sqrt{1+(y')^2}$とおくと、

$$F[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} f(y')\, dx$$

と書くことができる。

ここで、図のように、$\delta y(x)$を微小量として、曲線$y(x)$を$y(x)+\delta y(x)$に変化させたときの汎関数の変化について考えよう。ただし、端点は固定されているので、$\delta x(x_A) = \delta x(x_B) = 0$である。$F[y(x)]$の変分は、式(2.2.1)より、

$$\delta F = \int_{x_A}^{x_B} f(y'+\delta y') dx - \int_{x_A}^{x_B} f(y') dx \tag{2.2.3}$$

である。ここで、$\delta y'$を微小として、$f(y'+\delta y')$をテイラー展開し、一次までで止める。

$$f(y'+\delta y') = f(y') + \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \delta y' \tag{2.2.4}$$

式(2.2.4)を(2.2.3)に代入すると、

$$\delta F = \int_{x_A}^{x_B} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \delta y' dx$$

となる。ここで、$\delta y' = \frac{d}{dx}\delta y$であるから部分積分を行うことができ、

$$\delta F = \left[\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \delta y\right]_{x=x_A}^{x=x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) \delta y dx$$

となる。今、端点は固定されているので、$\delta y(x_A) = \delta y(x_B) = 0$である。したがって、

$$\delta F = -\int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) \delta y dx \tag{2.2.5}$$

となる。

任意の微小変化$\delta y(x)$に対して$\delta F = 0$となるためには、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) = 0 \tag{2.2.6}$$

でなければならない。式(2.2.6)が、点Aと点Bを結ぶ曲線のうち長さが最小となる曲線を求めるための微分方程式である。微分方程式(2.2.6)の一般解は簡単に求めることができる。

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \text{定数}$$

であれば、(2.2.6)が満たされる。この関係が成り立つには、$y' = $ 定数でなければならないので、微分方程式(2.2.4)の一般解は、

$$y(x) = C_1 x + C_2 \qquad (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

であることが分かる。つまり、点 A と B を結ぶ曲線のうち長さが最小のものは直線である。

2.3 オイラー・ラグランジュ方程式

以下の形の汎関数についての変分問題を考える。

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} f\big(y(x), y'(x)\big) dx$$

関数$y(x)$を$y(x) + \delta y(x)$に変化させたときの汎関数$I[y]$の変分は、

$$\begin{aligned} \delta I &= I[y + \delta y] - I[y] \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \{f(y + \delta y, y' + \delta y') - f(y, y')\} dx \end{aligned} \qquad (2.3.1)$$

である。ここで、δyと$\delta y'$が微小であるとして、$f(y + \delta y, y' + \delta y')$をテーラー展開し 1 次までとると、

$$f(y + \delta y, y' + \delta y') = f(y, y') + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \qquad (2.3.2)$$

となる。式(2.3.2)を式(2.3.1)に代入すると、

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left\{\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right\} dx$$

となる。右辺第 2 項の積分は、$\delta y' = \frac{d}{dx}\delta y$であることに注意して部分積分を行うと以下のように書き直すことができる。

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right) dx$$

端点は固定されているので、$\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$ であり、したがって、

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' dx = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right) dx$$

となる。以上より、変分δIは

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\} \delta y dx$$

と書けることが分かる。

汎関数$I[y(x)]$が停留値をとる条件は、任意の$\delta y(x)$に対して変分δIがゼロになることである。これを満足するためには、

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (2.3.3)$$

でなければならない。この微分方程式のことを**オイラー・ラグランジュ方程式**と呼ぶ。オイラー・

ラグランジュ方程式を解くことにより、汎関数$I[y(x)]$が極小または極大となる関数$y(x)$を求めることが出来る。

2．4 懸垂線の方程式

ここでは、オイラー・ラグランジュ方程式の応用例として、変分法を用いて懸垂線の方程式を導出する。懸垂線とは、ひもの両端を固定してぶら下げたときのひもの形のことである。

両端を固定したひもは、重力の影響で垂れ下がる。垂れ下がったひもの形状は、ひもの全重力ポテンシャルエネルギーを最小化するものである。鉛直上向きにy軸をとり、ひもの形状を関数$y(x)$で表すことにする。このとき、xと$x+\Delta x$の間にあるひもの微小部分のひもの長さは、

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (y'(x)\Delta x)^2} = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\Delta x$$

である。ひもの線密度をρ、重力加速度の大きさをgとすると、この微小部分の重力ポテンシャルエネルギーは、

$$\rho \cdot \Delta l \cdot g \cdot y(x) = \rho g y(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\Delta x$$

である。これをひも全体に渡って足し合わせたものがひも全体のポテンシャルエネルギーである。したがって、全ポテンシャルエネルギーUはひもの形$y(x)$の汎関数として、

$$U[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \rho g y(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx \qquad (2.4.1)$$

で与えられる。

(2.4.1)の汎関数が極値をとる関数$y(x)$が県垂線の形状を表す関数である。(2.4.1)の被積分関数は、

$$f(y, y') = \rho g y\sqrt{1 + (y')^2} \qquad (2.4.2)$$

であり、yとy'に依存する形となっている。したがって、前節で導出したオイラー・ラグランジュ方程式(2.3.3)を解くことで、汎関数$U[y(x)]$が極値をとる関数$y(x)$を求めることができる。(2.4.2)を(2.3.3)に代入すると、

$$\rho g\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\rho g y y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\right) = 0$$

となる。これが、懸垂線を求めるためのオイラー・ラグランジュ方程式である。両辺をρgで割り、さらに左辺第 2 項のxによる微分を実行すると、

$$\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{(y')^2 + y y''}{\sqrt{1 + (y')^2}} + \frac{y (y')^2 y''}{\{1 + (y')^2\}^{\frac{3}{2}}} = 0$$

となる。両辺に$(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}$をかけてから式を整理すると、最終的に

$$1 - y y'' + (y')^2 = 0 \qquad (2.4.3)$$

という微分方程式が得られる。これが懸垂線の方程式である。

ここでは、微分方程式の解法については議論しないが、懸垂線の方程式(2.4.3)の一般解は、

$$y(x) = C\cosh\left(\frac{x-A}{C}\right)$$

である。ここで、CとAは任意の定数である。また、coshはハイパボリック・コサインと読み、双曲線関数

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

のことである。