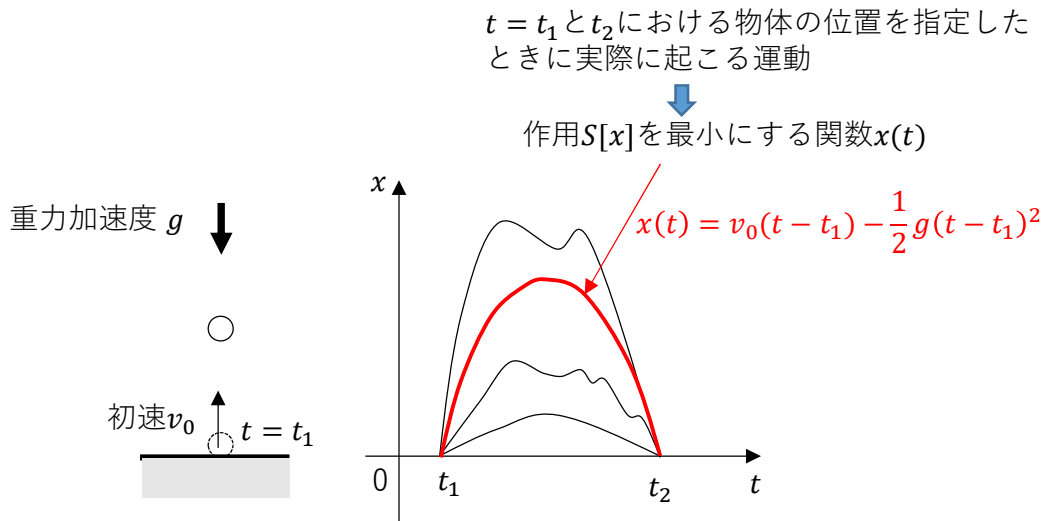


## Chapter 3 ラグランジュ形式の解析力学

ニュートン力学では、物体の運動を、力と加速度の因果関係によって説明する(ニュートンの第二法則)。これを数学的に表現したものが運動方程式であり、運動方程式を解くことによって、物体の運動の様子を知ることができる。解析力学では、視点を変えて、物体の運動を変分問題の形に焼き直す。ラグランジュ形式の解析力学は、ニュートンの運動法則を作用についての変分問題として再構築したものである。

### 3.1 最小作用の原理



簡単のため1次元の運動から議論を始める。図のように、鉛直上向きに $x$ 軸をとり、時刻 $t = t_1$ において地面( $x = 0$ )から質量 $m$ のボールを初速 $v_0$ で上向きに投げ上げたときのボールの運動について考えよう。ニュートンの運動法則に基づくと、ボールの運動は、運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg$$

を解いて、

$$x(t) = v_0(t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2$$

と求まる。これが、図の赤線のグラフである。

ラグランジュ形式の解析力学では、このような力学の問題を以下のようにして変分問題の形に焼き直す。まず、始め( $t = t_1$ )と終わり( $t = t_2$ )の物体の位置を決める。そして、図のように、 $t_1 < t <$

$t_2$ において考えられるありとあらゆるグラフを仮想的に考える。その中で、**作用**と呼ばれる汎関数  $S[x]$ を最小化する関数  $x(t)$ が時刻  $t_1 < t < t_2$ において実際に起こる物体の運動である。これを**最小作用の原理**と呼ぶ。

作用  $S[x(t)]$ は、以下のように定義される。

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt \quad (3.1.1)$$

ここで、関数  $L(x, \dot{x})$ のことを**ラグランジアン**と呼ぶ。質点に保存力だけが作用するとき、ラグランジアンは

$$L = T - U \quad (3.1.2)$$

で与えられる。ここで、 $T$ は運動エネルギー、 $U$ はポテンシャルエネルギーである。作用  $S[x(t)]$ を最小化する  $x(t)$ は、Chapter 2 で導出したオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (3.1.3)$$

を解くことによって求めることができる。

例) 自由落下

質量  $m$ の粒子が重力の作用で自由落下する場合を考える。 $y$ 軸を鉛直上向きにとれば、重力ポテンシャルエネルギーは  $U(y) = mgy$ なので、この系のラグランジアンは、

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy \quad (3.1.4)$$

である。このとき、

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

なので、オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$-mg - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0$$

となる。この式を書き直すと、

$$m\ddot{y} = -mg$$

となる。 $\ddot{y}$ は加速度であるから、この微分方程式は、ニュートンの運動方程式そのものである。つまり、ラグランジアンを計算してオイラー・ラグランジュ方程式を求めるという作業は、運動方程式を求めるための手続きである。この例のような簡単な問題なら、わざわざオイラー・ラグランジュ方程式を使わなくてもすぐに運動方程式は求まる。しかし、問題が複雑になってくると、運動方程式を立てると自体が困難となり、そのような場合に解析力学が力を発揮することになる。

例) 一次元調和振動子

平衡点からの距離に比例する復元力を受けて運動する物体のことを**調和振動子**と呼ぶ。ばねの

弾性力による運動をイメージすればよい。一次元調和振動子のポテンシャルエネルギーは、

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

である。ここで、 $k$ はばね定数である。この場合のラグランジアンは、

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

となる。これをオイラー・ラグランジュ方程式(3.1.3)に代入すると、

$$-kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$$

となる。この式を書き直すと、以下の関係が得られる。

$$m\ddot{x} = -kx$$

これは、ばね定数 $k$ のばねにつながれた物体の運動方程式である。この微分方程式を解くと、一般解として、単振動の解:

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \quad (A, \phi \text{は任意定数})$$

が得られる。

## 3.2 一般化座標

前節で議論した1次元運動は、物体の位置を表す一つの力学変数(座標 $x$ )で記述することができる。このような系を1自由度系と呼ぶ。 **$N$ 自由度系**とは、物体の配置が $N$ 個の独立な**力学変数**によって指定される系のことである。3次元空間における物体の配置は、ふつうはデカルト座標(直交座標)を用いて定義するが、極座標などデカルト座標以外の座標系を用いて定義することも可能である。デカルト座標に限定されない一般的な座標のことを**一般化座標**とび、これを変数 $q$ で表すことにする。自由度の大きさは座標系にはよらないので、 $N$ 自由度系の配置は一般化座標における $N$ 個の独立変数

$$q_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

を用いて表現することができる。

以下では、系の自由度と一般化座標についての具体例を示す。

### ◆ 1次元空間の1個の質点

質点の配置は、1個の力学変数 $x$ により指定できる。したがって、この系の自由度は $N = 1$ であり、一般化座標は $q_1 = x$ である。

### ◆ 3次元空間の1個の質点

質点の配置は、デカルト座標における三つの力学変数 $x, y, z$ により指定できる。したがって、この

系の自由度は $N = 3$ であり、一般化座標は $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$ となる。座標系として極座標を用いた場合には、一般化座標は $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \phi$ となる。

◆ 3次元空間における  $n$  個の質点

$N$  個の質点の配置は、デカルト座標系における  $3N$  個の力学変数  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) によって指定できる。従って、この系の自由度は  $N = 3n$  である。デカルト座標を用いる場合、一般化座標  $q$  は以下のようになる。

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1, & q_2 &= y_1, & q_3 &= z_1 \\ q_4 &= x_2, & q_5 &= y_2, & q_6 &= z_2 \\ & & & \vdots & & \\ q_{3n-2} &= x_n, & q_{3n-1} &= y_n, & q_{3n} &= z_n \end{aligned}$$

### 3.3 $N$ 自由度系における最小作用の原理

3.1 節で解説した 1 自由度系についての最小作用の原理を、 $N$  自由度系に一般化する。 $N$  自由度系のラグランジアンは、 $N$  個の一般化座標  $q$  とその時間微分  $\dot{q}$  の関数として与えられる。

$$L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$$

以後、簡単のため、 $N$  自由度系のラグランジアンを、添え字を省略して以下のように表すことにする。

$$L(q, \dot{q})$$

このとき、 $N$  自由度系の運動は、以下で述べる最小作用の原理によって決定される。二つの時刻  $t = t_1, t = t_2$  のときの一般化座標  $q(t_1), q(t_2)$  を指定したとき、 $t_1 < t < t_2$  における系の時間変化  $q(t)$  は、作用

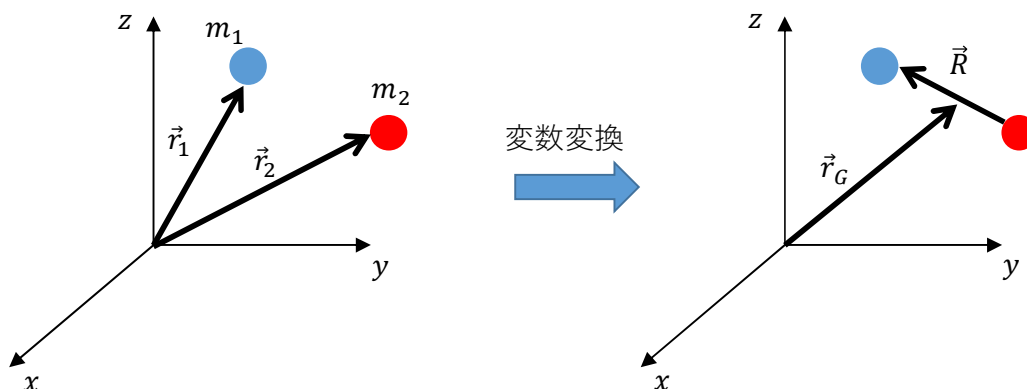
$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

を最小化するものである。作用を最小化する  $q(t)$  は、 $N$  個のオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

を解くことで求めることができる。

### 3.4 相互作用する二つの質点



ここでは、多自由度系の例として、図のような相互作用する二つの粒子の運動について考える。二つの粒子の位置をそれぞれ $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ とする。粒子間に働く相互作用のポテンシャルエネルギーは、二つの粒子の配置で決まるので $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ と書ける。特に、相互作用が二つの粒子の相対的な位置関係で決まる場合には、相互作用ポテンシャルは相対座標 $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ の関数となり、 $U(\vec{R})$ の形で定義される。

少し話しが脱線するが、ここで、相互作用ポテンシャルエネルギーが $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ で与えられるとき、作用・反作用の法則が成り立つことを簡単に確認しておく。保存力とポテンシャルエネルギーの関係( $\vec{F} = -\nabla U$ )より、粒子1が粒子2から受ける力は、

$$\vec{F}_1 = \left( -\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial x_1}, -\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial y_1}, -\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial z_1} \right)$$

で与えられる。この式の右辺の各偏微分は、

$$\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial(x_1 - x_2)} \frac{\partial(x_1 - x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial(x_1 - x_2)}$$

のように計算できるので、

$$\vec{F}_1 = \left( -\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial(x_1 - x_2)}, -\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial(y_1 - y_2)}, -\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial(z_1 - z_2)} \right)$$

となる。同様にして、粒子2が粒子1から受ける力を計算すると、

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= \left( -\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial x_2}, -\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial y_2}, -\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial z_2} \right) \\ &= \left( \frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial(x_1 - x_2)}, \frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial(y_1 - y_2)}, \frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial(z_1 - z_2)} \right) = -\vec{F}_1 \end{aligned}$$

となり、作用・反作用の関係が成り立っていることが分かる。

相互作用ポテンシャルエネルギー $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ が存在する2粒子系のラグランジアンは、

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{1}{2}m_1(\dot{\vec{r}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\vec{r}}_2)^2 - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (3.4.1)$$

である。この系の場合には、2粒子の重心位置 $\vec{r}_G$ と粒子2から見た粒子1の相対位置 $\vec{R}$ を独立変数として解析を行った方が現象を理解しやすい。重心の位置ベクトル $\vec{r}_G$ は、

$$\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

で定義される。今、二つの粒子を質量 $m_1 + m_2$ が重心に集中した1個の質点とみなし、この質点のラグランジアンを書くと、

$$L_G = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{\vec{r}}_G)^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

となる。

系全体のラグランジアン $L$ から $L_G$ を差し引いた残り $L_R$ を求めると、

$$\begin{aligned} L_R = L - L_G &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2)^2 - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\dot{\vec{R}})^2 - U(\vec{R}) \end{aligned}$$

となる。この結果より、 $L_R$ は相対座標 $\vec{R}$ と、その時間微分 $\dot{\vec{R}}$ のみに依存していることが分かる。ここで、換算質量 $\mu$ を、

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

と定義すると、

$$L_R(\vec{R}, \dot{\vec{R}}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{\vec{R}})^2 - U(\vec{R})$$

と書ける。従って、 $L_R$ は質量 $\mu$ の質点のラグランジアンと同じである。

以上の議論より、 $\vec{r}_G$ と $\vec{R}$ を独立変数にすると、ラグランジアンは、 $\vec{r}_G$ が寄与する項 $L_G$ と $\vec{R}$ が寄与する項 $L_R$ に分離される。

$$\begin{aligned} L(\vec{r}_G, \dot{\vec{r}}_G, \vec{R}, \dot{\vec{R}}) &= L_G(\vec{r}_G, \dot{\vec{r}}_G) + L_R(\vec{R}, \dot{\vec{R}}) \\ L_G(\vec{r}_G, \dot{\vec{r}}_G) &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{\vec{r}}_G)^2 \\ L_R(\vec{R}, \dot{\vec{R}}) &= \frac{1}{2}\mu(\dot{\vec{R}})^2 - U(\vec{R}) \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

相互作用する2粒子の問題を考えると、 $\vec{r}_1$ と $\vec{r}_2$ を独立変数にするよりも、 $\vec{r}_G$ と $\vec{R}$ を独立変数とした方が格段に見通しが良い。それは、ラグランジアンにおける変数を分離することができ、 $\vec{r}_G$ と $\vec{R}$ の振

る舞いを独立に解析できるようになるためである。相互作用する 2 粒子の運動は、質量  $m_1 + m_2$  の自由粒子として振る舞う重心の運動と、ポテンシャルエネルギー  $U(\vec{R})$  が作用する質量  $\mu$  の粒子として振る舞う相対運動を組み合わせたものとして解釈できるのである。