Chapter 4 拘束のある系

　滑車や振り子など力学的な機械を含んだ系では、機械の働きによって物体の運動が拘束される。ここでは、ラグランジュ形式の解析力学における拘束条件の取り扱い方について解説する。

4.1 ラグランジュの未定乗数法

　この章の目的は、拘束条件が存在する場合のオイラー・ラグランジュ方程式を導入することであるが、その準備としてラグランジュの未定乗数法について復習しておく。今、二つの変数xとyは、いつも拘束条件$g(x,y)=0$を満足するものとする。これは、xとyが独立には変化できないことを意味する。ここで、拘束条件$g(x,y)=0$が課されている場合の 2 変数関数$f(x,y)$の極値問題を考えよう。

　xとyが微小変化したときの関数$g(x,y)$の変化は、関数gの全微分dgによって与えられる。

$$dg=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy$$

変数xとyは、つねに拘束条件$g(x,y)=0$を満足するので、

$$dg=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy=0 \tag{4.1.1}$$

が成立する。一方、xとyが微小変化したときの関数$f(x,y)$の変化は、

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy \tag{4.1.2}$$

である。関数$f(x,y)$が極値をとるための条件は、$df=0$（停留条件）である。(4.1.1)を満足しつつ、$df=0$となるには、

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y} \tag{4.1.3}$$

となっていればよい。ここで、λは任意の定数であり、これをラグランジュの未定乗数とよぶ。実際に(4.1.3)を(4.1.2)に代入してみると、

$$df=\left(\lambda\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx+\left(\lambda\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy=\lambda dg=0$$

となって、$df=0$となることが確かめられる。

　上の議論より、拘束条件$g(x,y)=0$が課されている場合の$f(x,y)$の極値問題では、以下のx,y,λについての三元連立方程式を解けばよいことが分かる。これを**ラグランジュの未定乗数法**と呼ぶ。

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)=0 \qquad (4.1.4)$$
$$g(x,y)=0$$

（例題）周の長さがLの四角形のなかで面積が最大となるのはどのような場合か？

この問題は、ラグランジュの未定乗数法を用いて簡単に解くことができる。四角形の幅と高さをそれぞれx、yとする。周の長さがLなので、xとyは、つねに $2x+2y=L$を満足する。これが、この問題における拘束条件となる。一方、四角形の面積は$f(x,y)=xy$である。したがって、拘束条件

$$g(x,y)=2x+2y-L=0 \qquad (4.1.5)$$

のもとで2変数関数

$$f(x,y)=xy \qquad (4.1.6)$$

が最大になるxとyを求めればよい。 (4.1.5)および(4.1.6)を(4.1.4)に代入すると、以下の連立方程式が得られる。

$$y-2\lambda=0$$
$$x-2\lambda=0$$
$$2x+2y-L=0$$

この連立方程式を解くと、$x=y=L/4$と求まる。つまり、周の長さがLの四角形のなかで面積が最大になるのは、一辺の長さが$L/4$の正方形である。

4.2 拘束条件がある場合のオイラー・ラグランジュ方程式

拘束条件がある場合の変分問題も、ラグランジュ未定乗数法と同様の考え方で解くことができる。一般化変数q_1,q_2で記述される系に拘束条件

$$C(q_1,q_2)=0 \qquad (4.2.1)$$

が課された場合を考えよう。拘束条件が課せられたことによって、$q_1(t)$と$q_2(t)$は独立ではなくなり、結果として自由度が1つ減る。この系の作用は、

$$S[q_1(t),q_2(t)]=\int_{t_1}^{t_2} L(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2)\,dt$$

で与えられる。$q_1(t)$が$q_1(t)+\delta q_1(t)$に、$q_2(t)$が$q_2(t)+\delta q_2(t)$に微小変化したときの、作用$S[q_1(t),q_2(t)]$の変分を計算すると、

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)\right\}\delta q_1 dt+\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)\right\}\delta q_2 dt \qquad (4.2.2)$$

となる（Chapter 2 を参照）。一方、$q_1(t)$が$q_1(t)+\delta q_1(t)$に、$q_2(t)$が$q_2(t)+\delta q_2(t)$に微小変化し

たときの$C(q_1(t), q_2(t))$の変化は、

$$dC = \frac{\partial C}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial C}{\partial q_2}\delta q_2$$

で与えられる。今、$C(q_1, q_2) = 0$が拘束条件として課せられているので、$dC = 0$であり、δq_1とδq_2の間には以下の関係が成り立つ。

$$\frac{\partial C}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial C}{\partial q_2}\delta q_2 = 0$$

従って、$\delta S = 0$となるには、$\lambda(t)$を任意の関数として、以下の関係が成り立てばよい。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) &= -\lambda(t)\frac{\partial C}{\partial q_1} \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) &= -\lambda(t)\frac{\partial C}{\partial q_2} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

実際に、(4.2.3)を(4.2.2)に代入してみると、

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{-\lambda(t)\frac{\partial C}{\partial q_1}\right\}\delta q_1 dt + \int_{t_1}^{t_2}\left\{-\lambda(t)\frac{\partial C}{\partial q_2}\right\}\delta q_2 dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{-\lambda(t)\left(\frac{\partial C}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial C}{\partial q_2}\delta q_2\right)\right\}dt = 0 \end{aligned}$$

となり、確かに$\delta S = 0$となることが分かる。

したがって、拘束条件(4.2.1)のもとで、作用$S[q_1, q_2]$を極小にする$q_1(t)$と$q_2(t)$を求めるには、以下の三つの方程式を連立させて解けばよい。

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) + \lambda(t)\frac{\partial C}{\partial q_1} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) + \lambda(t)\frac{\partial C}{\partial q_2} &= 0 \\ C(q_1, q_2) &= 0 \end{aligned}} \tag{4.2.4}$$

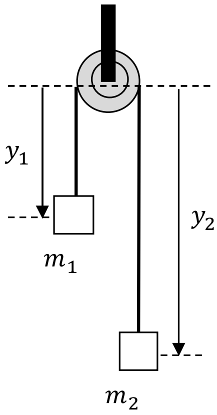
以上の議論は、A 個の拘束条件が課された N 個の一般化座標で記述される系の場合に一般化できる。ここでは導出は省略し、結果のみを示す。N 個の力学変数$q_1, q_2, \cdots, q_N$に対して A 個の拘束条件

$$C_j(q_1, q_2, \cdots, q_N) = 0 \quad (j = 1,2, \cdots, A)$$

が課されているときに、作用$S[q]$を極小にする$q(t)$は、A個のラグランジュ未定関数$\lambda_j(t)$を導入して、以下の N 個の微分方程式とA個の拘束条件を連立させて解くことで求まる。

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_{j=1}^{A}\lambda_j\frac{\partial C_j(q)}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1,2, \cdots, N) \\ &C_j(q_1, q_2, \cdots, q_N) = 0 \quad (j = 1,2, \cdots, A) \end{aligned}} \tag{4.2.5}$$

例）滑車に吊り下げられた2物体



質量m_1とm_2の物体が滑車に吊り下げられている。鉛直下向きにy軸をとり、二つの物体の位置をそれぞれy_1およびy_2とすれば、この系のラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2{}^2 + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \qquad (4.2.6)$$

と書ける。滑車に掛けられたひもの長さは一定だから、二つの物体を$y_1 + y_2 = l$ (定数)の関係を満たしながら運動する。よって、この系の拘束条件は、

$$C(y_1, y_2) = y_1 + y_2 - l = 0 \qquad (4.2.7)$$

である。拘束条件がある場合のオイラー･ラグランジュ方程式:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right) + \lambda\frac{\partial C}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2}\right) + \lambda\frac{\partial C}{\partial y_2} = 0$$

に、(4.2.6)および(4.2.7)を代入すると、

$$m_1 g - m_1\ddot{y}_1 + \lambda = 0 \qquad (4.2.8)$$

$$m_2 g - m_2\ddot{y}_2 + \lambda = 0 \qquad (4.2.9)$$

となる。これらの式からλを消去すると、以下の関係が得られる。

$$m_1 g - m_1\ddot{y}_1 = m_2 g - m_2\ddot{y}_2 \qquad (4.2.10)$$

また、拘束条件(4.2.7)の両辺を時間tで 2 回微分すると、

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0 \qquad (4.2.11)$$

が得られる。(4.2.10)と(4.2.11)から、$\ddot{y}_1$と$\ddot{y}_2$について解くと、

$$\ddot{y}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g, \qquad \ddot{y}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g \qquad (4.2.12)$$

となり、二つの物体は(4.2.12)の加速度で等加速度運動することが分かる。

また、(4.2.12)を(4.2.8)もしくは(4.2.9)に代入すると、

$$\lambda = -\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

と求まる。

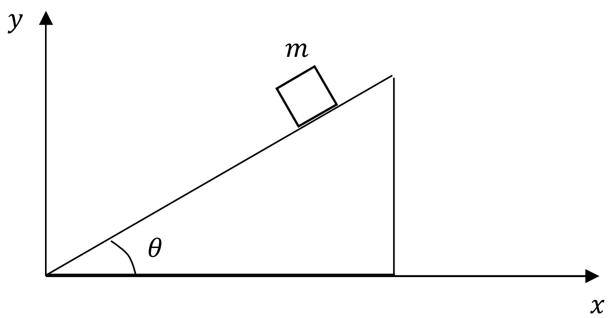
ここで、物体1と物体2の加速度をa_1, a_2として、(4.2.8)および(4.2.9)を書き直すと、以下のように、物体1および物体2についてのニュートンの運動方程式が得られる。

$$m_1 g + \lambda = m_1 a_1$$

$$m_2 g + \lambda = m_2 a_2$$

これらを見ると、この場合のラグランジュ未定関数λは、ひもから受ける張力の意味を持っていることが分かるだろう。このように、解析力学の枠組みでは、張力のような拘束力の効果を物理的に考察する必要がなく、数学的な拘束条件として与えるだけで機械的に運動方程式を導くことができる。

例）斜面を滑る物体



傾斜角θの斜面を質量mの物体が滑る場合を考えよう。ただし、斜面と物体の間には摩擦力は働かないものとする。図のように座標系を選び、物体の位置を座標(x, y)で表すことにする。物体は斜面に沿って動くので、xとyの間には、つねに

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

という関係が成り立つ。したがって、拘束条件は、

$$C(x, y) = y - \tan\theta\, x = 0 \tag{4.2.13}$$

と表すことができる。一方、この系のラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

なので、拘束条件(4.2.13)のもとでのオイラー・ラグランジュ方程式は、$\lambda(t)$をラグランジュ未定関数として、

$$-m\ddot{x} - \lambda \tan\theta = 0 \tag{4.2.14}$$

$$-mg - m\ddot{y} + \lambda = 0 \tag{4.2.15}$$

と求まる。(4.2.14)と(4.2.15)からλを消去すると、

$$-m\ddot{x} - m\tan\theta\,(g + \ddot{y}) = 0 \tag{4.2.16}$$

となる。拘束条件(4.2.13)の両辺を時間で 2 回微分すると、

$$\ddot{y} - \tan\theta\,\ddot{x} = 0 \tag{4.2.17}$$

となる。(4.2.16)と(4.2.17)を連立させて、$\ddot{x}$と$\ddot{y}$について解くと、

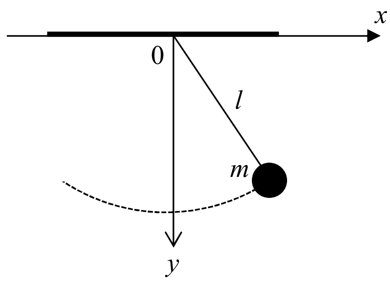
$$\ddot{x} = -\sin\theta\cos\theta\,g, \qquad \ddot{y} = -\sin^2\theta\,g$$

と求まる。したがって、この物体は、大きさは

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sin\theta\,g$$

の加速度で等加速度運動する。

例）単振り子



振り子の運動について考える。質量mの物体が長さlのひもで吊り下げられているとする。物体の位置を$\vec{r} = (x, y)$とする。この系のラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy$$

である。振り子の運動では、ひもの長さが一定なので、

$$C(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

が拘束条件となる。よって、この場合のオイラー・ラグランジュ方程式は

$$-m\ddot{x} + 2\lambda x = 0 \tag{4.2.18}$$

$$mg - m\ddot{y} + 2\lambda y = 0 \tag{4.2.19}$$

である。

振れ角θが小さい場合、$y = l\cos\theta \approx l$および$\ddot{y} \approx 0$と近似できる。これらを(4.2.12)に代入すると、

$$\lambda = -\frac{mg}{2l}$$

と求まる。このλを(4.2.18)に代入すれば、

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x$$

となり、$k = mg/l$とおけば、これは調和振動子の運動方程式と同じである。この結果より、振れ角が小さい場合には、振り子は単振動をし、その角振動数が$\sqrt{g/l}$であることが分かる。