Chapter 5 オイラー・ラグランジュ方程式の共変性

5.1 オイラー・ラグランジュ方程式の共変性とは

座標変換をしても方程式の形が変わらない性質のことを**共変性**という。この章では、オイラー・ラグランジュ方程式が点変換と呼ばれる座標変換に対して共変であることを示し、オイラー・ラグランジュ方程式が共変であることを利用して、極座標における運動方程式を求める。力学の問題を解析するうえでの「解析力学」の強味は、オイラー・ラグランジュ方程式の座標変換に対する共変性によるところが大きい。

N 自由度系の力学変数qを座標変換し、新しい座標系における力学変数をQとする。以下のように新しい座標を元の力学変数の関数として表すことができる座標変換のことを点変換と呼ぶ。

$$Q_1 = Q_1(q_1, q_2, \cdots, q_N)$$
$$\vdots$$
$$Q_N = Q_N(q_1, q_2, \cdots, q_N)$$

一般によく使われる極座標や円柱座標への変換が、点変換の例である。点変換の逆変換については、こんどは新しい力学変数Qの関数として

$$q_1 = q_1(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N)$$
$$\vdots$$
$$q_N = q_N(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N)$$

のように表される。

オイラー・ラグランジュ方程式は点変換に対しては共変である。これは具体的には以下のことを意味する。元の座標系(q)においてオイラー・ラグランジュ方程式:

$$\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{5.1.1}$$

が成り立つとき、点変換後の新しい座標系(Q)においても、

$$\frac{\partial L(Q,\dot{Q})}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(Q,\dot{Q})}{\partial \dot{Q}_i}\right) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{5.1.2}$$

が成り立つ。

5.2 点変換に対して共変であることの証明

元の座標系qでオイラー・ラグランジュ方程式(5.1.1)が成り立つとき、点変換した新しい座標系Qにおいてもオイラー・ラグランジュ方程式(5.1.2)が成り立つことを示す。

ラグランジアン$L(q,\dot{q})$を新しい一般化座標Q_iで偏微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i} \tag{5.2.1}$$

となる。一方、ラグランジアンLを$\dot{Q}_i$で偏微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} \tag{5.2,2}$$

となる。点変換であれば、q_jは$\dot{Q}_i$には依存しないので、

$$\frac{\partial q_j}{\partial \dot{Q}_i}=0 \tag{5.2.3}$$

である。また、$q_j(Q_1,Q_2,\cdots,Q_N)$の時間微分は、

$$\dot{q}_j=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial q_j}{\partial Q_k}\dot{Q}_k \tag{5.2.4}$$

であるから、

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}=\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \tag{5.2.5}$$

となる。 (5.2.3)及び(5.2.5)を(5.2.2)に代入すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

であるから、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)=\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)\right\} \tag{5.2.6}$$

となる。(5.2.1)と(5.2.6)から、

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right)=\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right\}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)\right\}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

となるが、元の座標系ではオイラー・ラグランジュ方程式(5.1.1)が成り立つので、結局、

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right)=\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)\right\}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{5.2.7}$$

となる。あとは、この式の右辺がゼロになることを示せばよい。

(5.2.4)をQ_iで偏微分すると、

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_i}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_i \partial Q_k}\dot{Q}_k$$

である。一方、$\partial \mathrm{q_j}/\partial Q_i$の時間微分は、

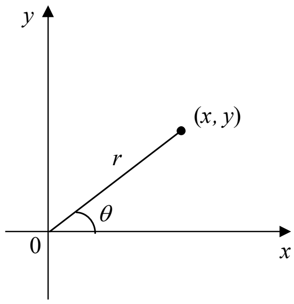
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 q_j}{\partial Q_k \partial Q_i}\dot{Q}_k$$

であるから、(5.2.7)の右辺がゼロであることが分かる。以上より、点変換後の新しい座標系Qにおいても、オイラー・ラグランジュ方程式、

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right)=0$$

が成り立つことが示された。

5.3 2次元極座標における1粒子の運動方程式



1個の粒子の2次元空間における運動を考える。デカルト座標を用いると、この系のラグランジアンは、

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-U(x,y)$$

と書ける。ここで、デカルト座標から極座標に座標変換する。デカルト座標(x,y)と極座標(r,θ)の間には、

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

の関係が成り立つ。xとyを時間微分すると、

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta\,\dot{\theta}$$
$$\dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\cos\theta\,\dot{\theta}$$

であるから、

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$$

となる。したがって、極座標におけるラグランジアンは、

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U(r,\theta) \tag{5.3.1}$$

である。

デカルト座標から極座標への変換は点変換であるから、極座標においてもオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=0$$

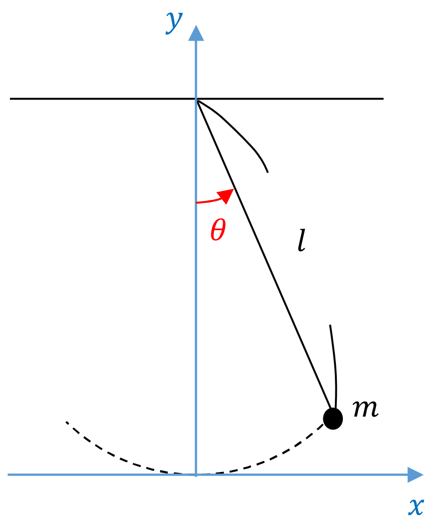
が成り立つ。これに、ラグランジアン(5.3.1)を代入すると、極座標における運動方程式が、

$$mr\dot{\theta}^2-\frac{\partial U}{\partial r}-m\ddot{r}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)+\frac{\partial U}{\partial \theta}=0$$

と求まる。

例　単振り子



単振り子の運動を、回転角θを独立変数として解析してみよう。図のように座標をとると、物体の位置は、

$$\vec{r}=(x,y)=(l\sin\theta\,,l-l\cos\theta)$$

である。これを時間で微分すると

$$\dot{\vec{r}}=(l\dot{\theta}\cos\theta\,,l\dot{\theta}\sin\theta)$$

となるので、

$$\left(\dot{\vec{r}}\right)^2=l^2\dot{\theta}^2$$

である。したがって、ラグランジアンは、

$$L(\theta,\dot{\theta})=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mg(l-l\cos\theta)$$

となる。

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-mgl\sin\theta,\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}$$

であるから、オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$-mgl\sin\theta-\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right)=0 \tag{5.3.2}$$

と求まる。これが回転角θを独立変数としたときの運動方程式である。

式(5.3.2)は、

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta \tag{5.3.3}$$

と書き直すことができる。微分方程式(5.3.3)を解くと、θを時間の関数として求めることができる。ただし、微分方程式(5.3.3)は$\sin\theta$を含む項があるため簡単に解くことができない。

微小振動する単振り子は近似的に単振動をすることが分かっている。そこで、式(5.3.3)のθが十分に小さいときの微分方程式を導出してみよう。θが十分に小さいとき、

$$\sin\theta\approx\theta$$

と近似できるので、微小振動の場合の回転角θについての運動方程式は、

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\theta$$

である。また、

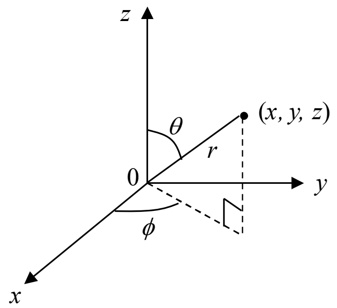
$$x=l\sin\theta\approx l\theta$$

であるから、微小振動の場合のxについての運動方程式は、

$$\ddot{x}=-\frac{g}{l}x$$

となる。これは、微小振動の場合の単振り子の運動方程式である。

５．４　3次元極座標での１粒子の運動方程式



今度は、3次元空間における1個の粒子の運動を考える。デカルト座標(x, y, z)と極座標(r, θ, ϕ)の間には、

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

が成り立つ。x、y、zの時間微分は、

$$\dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\cos\phi\,\dot{\theta} - \mathrm{r}\sin\theta\sin\phi\,\dot{\phi}$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta\sin\phi\,\dot{\theta} + r\sin\theta\cos\phi\,\dot{\phi}$$
$$\dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$$

であるから、

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2$$

となる。したがって、3次元極座標におけるラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - U(r, \theta, \phi)$$

である。このラグランジアンを、r、θ、ϕに関するオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0$$

に代入すると、3次元極座標における運動方程式は

$$mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} - m\ddot{r} = 0$$

$$mr^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\left(mr^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right) = 0$$

と求まる。