Chapter 6　対称性と保存則

　力学の問題を解くとき、エネルギー保存則や運動量保存則がは力学系の時間発展において、時間とともに変化しない量のことを保存量という。この章では、保存量がラグランジアンの対称性と関係していることをみる。

6．1　一般化運動量

　ラグランジアン$L(q,\dot{q})$の$\dot{q}_i$での偏微分

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

を、一般化座標q_iに共役な一般化運動量と呼ぶ。一般化運動量を用いると、オイラー・ラグランジュ方程式は、以下のように簡単に表すことができる。

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{dp}{dt} = 0$$

　ここで、一次元運動をする一個の粒子について考えてみよう。この系のラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x)$$

であるから、一般化運動量は、

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

である。よって、力学変数xと共役な一般化運動量は、ニュートン力学における運動量そのものあることが分かる。

6．2　循環座標と保存量

　N 自由度系のラグランジアン$L(q,\dot{q})$において変数q_iが循環座標なら、

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

である。これをオイラー・ラグランジュ方程式、

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

に代入すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{dp_i}{dt} = 0$$

となる。したがって、循環座標q_iと共役な一般化運動量p_iは保存する（時間変化しない）。

例）1次元空間の自由粒子

1次元運動をする自由粒子のラグランジアンは、

$$L(\dot{x})=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

なので、力学変数xは循環座標である。よって、xと共役な一般化運動量

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$$

は保存する。

例）等方的ポテンシャル下での2次元運動

等方的な系を扱う場合には、力学変数として極座標(r,θ)を用いるのが便利である。ポテンシャルエネルギーがθに依存しないとき、これを等方的ポテンシャルと呼ぶ。この系のラグランジアンは、

$$L\left(r,\dot{r},\dot{\theta}\right)=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U(r)$$

であり、θが循環座標となっている。したがって、θと共役な一般化運動量

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}$$

が保存する。この結果は、力学で学んだ角運動量保存則である。

例）万有引力を受けて運動する物体

等方的ポテンシャルの例として、万有引力の影響を受けて運動する物体について考えよう。原点に固定された質量Mの星の周辺を質量mの衛星が運動しているとする。原点から衛星までの距離をrとすると、万有引力のポテンシャルエネルギーは、

$$U(r)=-G\frac{Mm}{r}$$

で与えられる。ここで、Gは万有引力定数である。平面内での運動を考える場合には、この系のラグランジアンは、

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+G\frac{Mm}{r}$$

となり、θが循環座標であることが分かる。このラグランジアンからオイラー・ラグランジュ方程式を求めると、

$$m\ddot{r}=mr\dot{\theta}^2-G\frac{Mm}{r^2} \tag{6.2.1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=0 \tag{6.2.2}$$

となる。式(6.2.2)は、角運動量$p_\theta=mr^2\dot{\theta}$が保存することを意味している。ここで、

$$mr^2\dot{\theta} = l \quad （定数）$$

とおくと、式(6.2.1)から$\dot{\theta}$を消去することができ、式(6.2.1)は、

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - G\frac{Mm}{r^2}$$

となる。これは、力学変数rについて常微分方程式であり、この方程式を解けばrの時間変化$r(t)$を求めることができる。

６．３　ネーターの定理

以上では、循環座標と共役な一般化運動量が保存することを説明した。実は、保存量の存在は、系の対称性と関係している。運動量保存則は並進対称性に、角運動量保存則は回転対称性に起因している。系の対称性と保存量を関係づけるのがネーターの定理である。ネーターの定理とは、以下のようなものである。ϵを微小として無限小の座標変換：$q_i \to q_i + \epsilon f_i(q)$を考える。この無限小座標変換に対してラグランジアン$L(q, \dot{q})$が不変なら、

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i(q) = \sum_i p_i f_i(q)$$

は保存量である。

（証明）

まず、$\delta q_i = \epsilon f_i(q)$とおく。無限小変換（$q_i \to q_i + \epsilon f_i(q)$）したときのラグランジアンの変化は、

$$\delta L = L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}) - L(q, \dot{q}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i$$

である。オイラー・ラグランジュ方程式から、以下の関係が成り立つ。

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

これを代入すると

$$\delta L = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i$$

となる。$\delta L = 0$ならば、

$$\frac{d}{dt}\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i(q)\right) = \frac{d}{dt}\sum_i p_i f_i(q) = 0$$

なので、

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i(q) = \sum_i p_i f_i(q)$$

は保存する。

６．４　並進対称性と運動量保存則

外力の作用を受けない互いに相互作用するn個の粒子からなる系について考える。座標系にデカルト座標を選び、n個の粒子の位置を

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \qquad (i = 1,2,\cdots)$$

とする。粒子iと粒子jの間の2体間相互作用ポテンシャルは、以下のように表される。

$$U(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

この系のラグランジアンは、

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i<j} U\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \tag{6.4.1}$$

である。原点を並進移動する無限小変換

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad \rightarrow \quad \vec{r} + \vec{\epsilon} = (x + \epsilon, y + \epsilon, z + \epsilon)$$

に対してラグランジアン（6.4.1）は不変である。この無限小変換は、6.3 節で紹介したネーターの定理において、$f = 1$の場合に対応する。したがって、ネーターの定理に基づくと、

$$I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} (m\dot{x}_i + m\dot{y}_i + m\dot{z}_i)$$

が保存することが分かる。これは運動量保存則に他ならない。