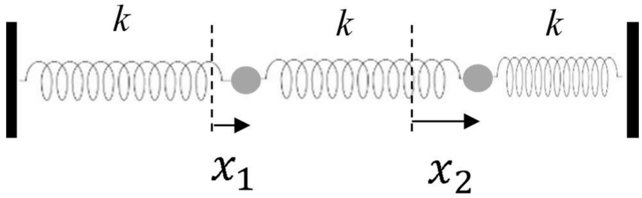
# Chapter 7 ラグランジュ形式の解析力学の実践応用

ここでは、ラグランジュ形式の解析力学を実践的に応用した例として、二体連成振動の問題を解く。図のように、壁の間に二つの質量$m$の質点があり、二つの質点の間と、質点と壁の間は、ばね定数$k$のばねで繋がれている。二つの質点について、それぞれの平衡位置からの変位を$x_1$および$x_2$とする。




この系のラグランジアンは、

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2-\frac{1}{2}kx_2^2$$

と書ける。このラグランジアンから得られるオイラー・ラグランジュ方程式は以下の通りである。

$$\begin{cases}-kx_1+k(x_2-x_1)-m\ddot{x}_1=0\\ -k(x_2-x_1)-kx_2-m\ddot{x}_2=0\end{cases}$$

これは$x_1(\mathrm{t})$と$x_2(t)$についての連立微分方程式であるが、両式に$x_1$と$x_2$が混在していて数学的な取り扱いが難しい。そこで、変数変換を行い、オイラー・ラグランジュ方程式において変数を分離することを試みる。

行列を利用して座標変換を行う。上のラグランジアンを行列を用いて書き直す。

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1,\dot{x}_2)\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}k(x_1,x_2)\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1,\dot{x}_2)\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}k(x_1,x_2)A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

ここで、

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

と定義した。

変換行列$T$により、力学変数を$(x_1,x_2)$から$(X_1,X_2)$に変換する。

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}$$

$$(x_1,x_2)=(X_1,X_2)\ {}^{\mathrm{t}}T$$

変換行列が時間に依存しなければ、時間微分量について以下の関係も成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix}$$

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (\dot{X}_1, \dot{X}_2)\ {}^{\mathrm{t}}T$$

したがって、ラグランジアンを新しい力学変数$X_1$と$X_2$を用いて書き直すと

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{X}_1 \quad \dot{X}_2)\ {}^{\mathrm{t}}TT \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} k (X_1 \quad X_2)\ {}^{\mathrm{t}}TAT \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

となる。このラグランジアンを単純な形にするためには、ラグランジアンに現れる行列

$${}^{\mathrm{t}}TT,\ {}^{\mathrm{t}}TAT$$

が対角行列になるような変換行列$T$を用いて変数変換をすればよい。そのような変換行列$T$を求めるには、行列$A$の固有ベクトルを求めればよい。行列$A$の固有値は、

$$|A - \lambda E| = 0$$

を解いて、

$$\lambda = 1, 3$$

と求まる。この二つの固有値に対する固有ベクトルは、

$$\lambda = 1 \ \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \lambda = 3 \ \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

である。これらの固有ベクトルを並べて作った変換行列

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

が求めたかった変換行列である。この変換行列を用いて ${}^{\mathrm{t}}TT$と ${}^{\mathrm{t}}TAT$を計算すると、

$${}^{\mathrm{t}}TT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ {}^{\mathrm{t}}TAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

であり、確かに対角化されていることが分かる。この変換行列によって得られる新しい力学変数を用いるとラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{X}_1 \quad \dot{X}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} k (X_1 \quad X_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{X}_1^2 - \frac{1}{2} k X_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{X}_2^2 - \frac{3}{2} k X_2^2$$

と書ける。このラグランジアンから以下のオイラー・ラグランジュ方程式が得られる。

$$m\ddot{X}_1 = -kX_1$$

$$m\ddot{X}_2 = -3kX_x$$

これらの式は、ばね定数$k$のばねにつながれた質量$m$の質点と、ばね定数$3k$のばねにつながれた質量$m$の質点についての運動方程式である。この結果は、連成振動する二つの質点の運動が、独

立に運動する、質量$m$、ばね定数$k$の調和振動子と、質量$m$、ばね定数$3k$の調和振動子に分離されたことを意味する。