Chapter 8 ハミルトン形式の解析力学

8-1 ルジャンドル変換

ルジャンドル変換とは、関数の変数を変えるための変換である。ここでは、簡単のため、2変数関数$f(x,y)$のルジャンドル変換について解説する。まず、変数uとvを

$$u=\frac{\partial f}{\partial x},\qquad v=\frac{\partial f}{\partial y}$$

と定義しておく。関数$f(x,y)$の持つ情報を失うことなく、独立変数をxからuに変えたり、yからvに変えたりするのが、ルジャンドル変換である。関数fの全微分は、以下のように書ける。

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=udx+vdy$$

新しい量gを、

$$g=f-ux$$

と定義する。gの全微分を計算してみると、

$$dg=df-udx-xdu=udx+vdy-udx-xdu=-xdu+vdy$$

となって、gの独立変数が(u,y)であることが分かる。このようにして、関数$f(x,y)$から$g(u,y)$に変換することを、関数$f(x,y)$を変数xについてルジャンドル変換すると言う。このとき、$g(u,y)$は、$f(x,y)$と全く同じ情報を持っている。

関数$f(x,y)$をxとyについてルジャンドル変換する場合には、新しい量を

$$h=f-ux-vy$$

と定義する。hの全微分を計算してみると、

$$\begin{aligned}dh&=df-udx-xdu-vdy-ydv\\&=udx+vdy-udx-xdu-vdy-ydv\\&=-xdu-ydv\end{aligned}$$

であり、確かにhの独立変数がuとvになっていることが分かる。

8-2 正準方程式

ラグランジアン$L(q,\dot{q})$の独立変数は、qと$\dot{q}$である。ラグランジアンを$\dot{q}$についてルジャンドル変換する。

$$H=\sum_{i=1}^{N}p_i\dot{q}_i-L$$

を定義し、新しい量Hのことを**ハミルトニアン**と呼ぶ。ハミルトニアンの全微分を計算すると、

$$
\begin{aligned}
dH = \sum_{i=1}^{N}(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - dL \\
&= \sum_{i=1}^{N}(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + p_i d\dot{q}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i\right)
\end{aligned}
$$

となり、Hの独立変数がpとqであることが分かる。また、オイラー・ラグランジュ方程式より、

$$
\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \dot{p}_i
$$

が成り立つので、これを代入すると、

$$
dH = \sum_{i=1}^{N}(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i)
$$

となる。したがって、以下の関係が成り立つ。

$$
\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{8.2.1}
$$

これらの関係式のことを**正準方程式**と呼ぶ。

8-3 保存力のみが働く系のハミルトニアン

保存力のみが働くN自由度系のラグランジアンは、

$$
L = T - U = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{q}_i^2 - U(q)
$$

一般化運動量は、

$$
p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i\dot{q}_i
$$

である。よって、この系のハミルトニアンは、

$$
\begin{aligned}
H = \sum_{i=1}^{N}p_i\dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{N}m_i\dot{q}_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{q}_i^2 - U(q)\right) \\
= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{q}_i^2 + U(q)
\end{aligned}
$$

と求まる。つまり、保存力のみが働く系のハミルトニアンは、

$$
H = T + U
$$

であり、系の全エネルギーと等しい。

8.4 位相空間

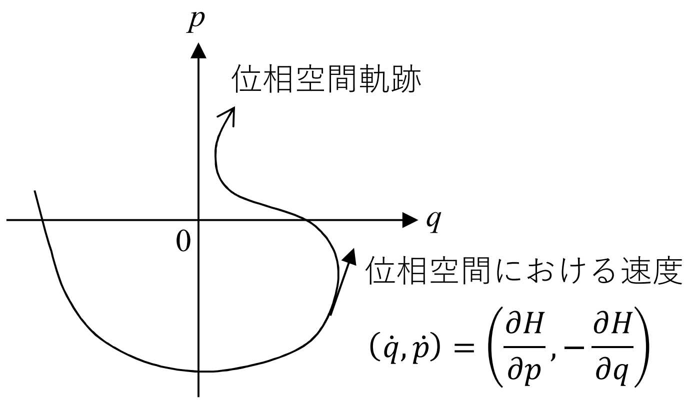
ハミルトニアンの独立変数はqとpであり、正準方程式(8.2.1)の形をみると、qとpの扱いが同等になっていることが分かる。N 自由度系のハミルトニアンの独立変数は以下の 2N 個である。

$$q_1, q_2, \cdots, q_N, p_1, p_2, \cdots p_N$$

これらの変数で構成される 2N 次元空間を考え、そのような空間のことを**位相空間**と呼ぶ。位相空間を用いると、系の時間変化を位相空間における軌跡（位相空間軌跡）として捉えることができる。位相空間における速度ベクトルは$(\dot{q}, \dot{p})$であるが、正準方程式より、

$$(\dot{q}_i, \dot{p}_i) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$$

の関係が成り立つ。つまり、正準方程式は、位相空間における速度を与える関係式だと理解することができる。位相空間の一点を指定すると、そこでの速度$(\dot{q}, \dot{p})$が正準方程式により一意に決まるため、その後のqとpの時間変化は一意に決まる。これは、位相空間軌跡が交差しないことを意味する。



８．５　例：１次元調和振動子

1次元調和振動子のハミルトニアンは、

$$H(x, p) = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

である。したがって、正準方程式は、

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -kx \end{cases}$$

となる。上の式の両辺を時間微分すると、$\dot{p} = m\ddot{x}$。これを下の式に代入すると、

$$m\ddot{x} = -kx$$

となることから、正準方程式が調和振動子の運動方程式と同じものであることが分かる。

次に、1次元調和振動子の位相空間軌跡について考える。調和振動子の全エネルギーは保存

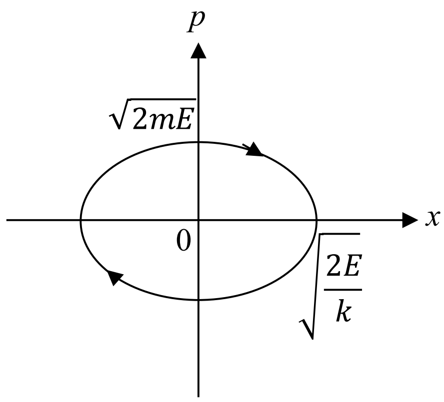
するので、xとpの間には以下の関係が成り立つ。

$$\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2=E \quad (\text{定数})$$

したがって、調和振動子の運動は、位相空間において楕円軌道を描くことが分かる（図参照）。位相空間における速度ベクトルは、

$$(\dot{x},\dot{p})=\left(\frac{p}{m},-kx\right)$$

で与えられるので、楕円軌道を時計回りに回ることが分かる。



8.6 ポアッソン括弧

ハミルトン形式の解析力学では、ポアッソン括弧と呼ばれる演算記号を用いると計算が便利になる。任意の二つの物理量$A(q,p,t)$と$B(q,p,t)$を考える。AとBのポアッソン括弧を

$$\{A,B\}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\right)$$

と定義する。ポアッソン括弧については、以下のような公式が成り立つ。

$$\{A,A\}=0$$

$$\{A,B\}=-\{B,A\} \quad (\text{反対称性})$$

$$\{\alpha A+\beta B,C\}=\alpha\{A,C\}+\beta\{B,C\}$$

$$\{A,\beta B+\gamma C\}=\beta\{A,B\}+\gamma\{A,C\}$$

$$\{A,BC\}=\{A,B\}C+B\{A,C\}$$

$$\{AB,C\}=\{A,C\}B+A\{B,C\}$$

$$\big\{A,\{B,C\}\big\}+\big\{B,\{C,A\}\big\}+\big\{C,\{A,B\}\big\}=0 \quad (\text{ヤコビ恒等式})$$

正準方程式(8.2.1)は、ポアッソン括弧を用いれば、

$$\dot{p}_j = \{p_j, H\}, \dot{q}_j = \{q_j, H\}$$

と表すことができる。実際にポアッソン括弧を計算してみれば、このように書けることが簡単に確かめられる。$\partial p_j/\partial q_i = 0$、$\partial p_j/\partial p_i$は$i = j$のときのみ 1 であるから、

$$\{p_j, H\} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial p_j}{\partial p_i}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

である。

8.7 物理量の時間微分とハミルトニアン

ある物理量$A(q, p, t)$の時間微分を計算すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A(q, p, t) &= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial A}{\partial t}\end{aligned}$$

である。ポアッソン括弧を使えば、以下のように簡単に表すことができる。

$$\frac{d}{dt}A(q, p, t) = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

特に、Aが時間tに陽に依存しない場合、すなわち$A(q, p)$と書けるときには、

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}$$

と書ける。つまり、ハミルトニアンとのポアッソン括弧は、時間微分の計算をすることに対応する。

例として、ハミルトニアンの時間微分について考える。ポアッソン括弧の公式を用いると、

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0$$

と計算できる。したがって、ハミルトニアンは保存量であることが分かる。