

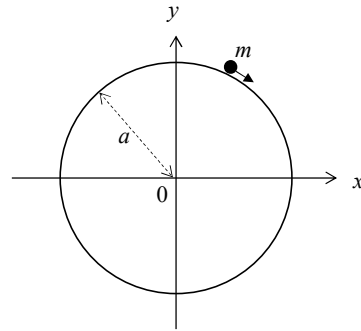
解析力学 演習問題

【1】質量 m_1 と m_2 の二つの粒子の2次元運動について考える。二つの粒子は、粒子間の距離に比例する以下のポテンシャルで相互作用しているものとする。

$$U = K\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (K \text{ は定数})$$

- (1) この系のラグランジアンを書き、オイラー・ラグランジュ方程式を求めなさい。
- (2) 二つの粒子の重心座標が等速運動することを示しなさい。

【2】図のように、半径 a の円筒の頂上 $(0, a)$ から質量 m の質点が初速ゼロで滑り始める。質点が円筒の表面から離れる点の y 座標を、拘束条件がある場合のオイラー・ラグランジュ方程式を用いて求めなさい。



【3】重力加速度 g の一様重力場中を自由落下する質量 m の粒子について、正準方程式を求めなさい。また、この系の位相空間軌跡を図示しなさい。

【4】ラグランジアンが以下の式で与えられる1自由度系を考える。

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(q + \dot{q})^2$$

- (1) この系の正準方程式を求めなさい。
- (2) $q(0) = p(0) = 1$ の初期条件のもとで正準方程式を解いて、 $q(t)$ と $p(t)$ を求めなさい。

【5】質点の角運動量ベクトルは、位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ と運動量ベクトル $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ を用いて、 $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = \vec{r} \times \vec{p}$ と定義される。

(1) 以下の(a)~(c)のポアソン括弧を求めなさい。

(a) $\{x, L_z\}$ (b) $\{y, L_z\}$ (c) $\{z, L_z\}$

(2) $\{L_x, L_y\} = L_z$ であることを示しなさい。

解析力学演習問題 略解

【1】

(1) ラグランジアンは,

$$L = \frac{1}{2}m_1((\dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_1)^2) + \frac{1}{2}m_2((\dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_2)^2) - K\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

従って、オイラー・ラグランジュ方程式は,

$$-K \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} - m_1 \ddot{x}_1 = 0, \quad -K \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} - m_2 \ddot{x}_2 = 0.$$

y 成分についても同様にして求まる.

(2) 上で求めた運動方程式より, $\frac{d^2}{dt^2}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0$ が導かれるので、重心の加速度がゼロであることが分かる.

【2】

この系のラグランジアンは, $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$. 拘束条件は, $C = x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

従って、オイラー・ラグランジュ方程式は,

$m\ddot{x} = 2\lambda x \dots (1)$, $m\ddot{y} = -mg + 2\lambda y \dots (2)$ となる. 式(1)× \dot{x} +式(2)× \dot{y} より

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \right] = 2\lambda(x\dot{x} + y\dot{y})$$

ここで, $\frac{dC}{dt} = 0$ より $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ であるから, $\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$ は一定であり, 初期条件を使うと, 以下の関係が得られる.

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = mga \dots (3)$$

また, 式(1)× x +式(2)× y を考え, $C=0$ および $\frac{d^2C}{dt^2} = 0$ から得られる $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \ddot{x}x + \ddot{y}y = 0$ を用いることで,

$\lambda = \frac{m}{2a^2}(gy - \dot{x}^2 - \dot{y}^2)$ と求まる. これに式(3)の関係をを用いると,

$\lambda = \frac{3mg}{2a^2} \left(y - \frac{2}{3}a \right)$ を得る. 質点が輪から離れるのは拘束力 (この場合は垂直抗力) がゼロ

になるときのなので, $\lambda = 0$ より $y = \frac{2}{3}a$ である.

【3】

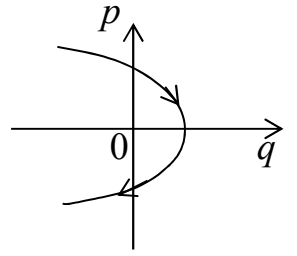
この系のハミルトニアンは、 $H = \frac{p^2}{2m} + mgq$. 従って、以下の正準方程式が得られる.

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \dots (1), \quad \dot{p} = -mg \dots (2)$$

式(2)より、 $p(t) = -mgt + p_0$. これを式(1)に代入して解くと、

$$q(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{p_0}{m}t + q_0.$$

上で求めた $p(t)$ と $q(t)$ の式から t を消去すると、 $q = -\frac{p^2}{2m^2g} + \frac{p_0^2}{2m^2g} + q_0$ となり、位相空間軌跡は図のようになる.



【4】

(1) 一般化運動量は $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = q + \dot{q}$ であるから、ハミルトニアンは

$$H = p\dot{q} - L = p(p - q) - \frac{1}{2}p^2 = \frac{p^2}{2} - pq \text{ となる.}$$

従って、正準方程式は、

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p - q \quad \text{及び} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = p \text{ と求まる.}$$

(2) $\dot{p} = p$ の解は、 $p = Ce^t$. 初期条件 $p(0) = 1$ より、 $p = e^t$.

この解を $\dot{q} = p - q$ に代入すると、 $\dot{q} = e^t - q$ となる. この方程式の解は、

$q = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ である. 初期条件から、定数 C_1 と C_2 は、 $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ と求まる. 以上を

まとめると、 $q(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$, $p(t) = e^t$.

【5】

(1) $L_x = yp_z - zp_y$, $L_y = zp_x - xp_z$, $L_z = xp_y - yp_x$

$$\{x, L_z\} = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial L_z}{\partial p_x} - \frac{\partial L_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p_x} + \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial L_z}{\partial p_y} - \frac{\partial L_z}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial p_y} + \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial L_z}{\partial p_z} - \frac{\partial L_z}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial p_z} = \frac{\partial L_z}{\partial p_x} = -y$$

同様の計算により、

$$\{y, L_z\} = x, \quad \{z, L_z\} = 0$$

(2) $\{L_x, L_y\} = \{yp_x - zp_y, zp_x - xp_z\} = -yp_x + xp_y = L_z$